MATHÉMATIQUES **Épreuve n° 1 (exercices)**

(Options T et TA) Durée : 4 heures

Les cinq exercices proposés sont indépendants. L'utilisation de calculatrice personnelle est autorisée.

Aucun document n'est permis, y compris pour l'emploi d'une calculatrice.

Il est demandé de rédiger chaque exercice sur une copie séparée.

- EXERCICE I -

On propose les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2}\,dx \quad : \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1-x)^2}\,dx$$

où ln représente le logarithme népérien.

Pour chacune des intégrales, dire si elle converge, et, en ce cas, trouver sa valeur.

- EXERCICE II -

On considère la forme différentielle :

$w = dy - tg(x+y)dx$ où $-\frac{\pi}{4} < x+y < \frac{\pi}{2}$

Prouver que w n'est pas exacte.

On définit la forme différentielle : $v = e^{y-x}.g(x+y).w$

où g est une fonction réelle de classe C^1 d'une variable réelle.

Déterminer g de sorte que v soit exacte. Rechercher les fonctions f telles que df = v.

- EXERCICE III -

Les questions N°2 et N°3 sont spécifiques à certaines options

E est un espace affine euclidien réel orienté de dimension 3, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal direct.

On définit sur E le champ vectoriel $\vec{V}$: à tout point M de E tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on fait correspondre le vecteur

$$\vec{V}(M) = (xz + y^2)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (x - 0.5.y^2)\vec{k}$$

1 - On considère les surfaces :

$$S = \{ M(x,y,z) \in E,\ x^2 + y^2 - 2y - z + 1 = 0 \}$$

$$T = \{ M(x,y,z) \in E,\ y - z + 1 = 0 \}$$

Préciser la nature de S et représenter S dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On définit l'ensemble : $C = S \cap T$.

Quelle est la projection orthogonale de C sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$?

Préciser la nature de C et représenter C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2 - Question réservée à l'option T.

En utilisant le théorème de Stokes, calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de C. Le champ $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

3 - Question réservée à l'option TA.

Fournir une représentation paramétrique de la courbe C et donner une expression de la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe C à l'aide d'une intégrale simple que l'on ne calculera pas.

Tournez la page S. V. P.

- EXERCICE IV -

On donne les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 130,01 & -50,02 & -114,98 \\ -50,02 & 40,04 & 64,96 \\ -114,98 & 64,96 & 122,54 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} -34,99 \\ 54,98 \\ 72,52 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \\ 72,5 \end{pmatrix}$$

1 - Résoudre par manipulation des lignes les deux systèmes linéaires $A.X = B_1$ et $A.X = B_2$. On notera respectivement X_1 et X_2 les solutions.

On présentera les calculs intermédiaires

On définit la norme sur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $||X|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$.

Calculer $e(B) = \dfrac{||B_2 - B_1||}{||B_1||}$, puis $e(X) = \dfrac{||X_2 - X_1||}{||X_1||}$

et le rapport $e(X)/e(B)$.

2 - Montrer que la matrice A possède trois valeurs propres réelles dont l'une v_1 est comprise entre 0 et 1 et une autre est supérieure à 100.
En utilisant la méthode par dichotomie, rechercher un encadrement $]a,b[$ de v_1 tel que $|b-a| < 3.10^{-2}$; on présentera toutes les étapes du calcul.

- EXERCICE V -

Soit E un espace affine réel euclidien de dimension 2, rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit les applications :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 3y$$
$$(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longrightarrow g(x,y) = x(3x + 2y - 6)$$

Pour tout couple $(a,b) \neq (0,0)$ de $\mathbb{R}^2$, on note :

$$C(a,b) = \{ M(x,y) \in E,\ a.f(x,y) + b.g(x,y) = 0 \}$$

1 - Tracer sur une même figure les ensembles C(1,0) et C(0,1). Que peut-on dire des points d'intersection de C(1,0) et C(0,1) relativement aux C(a,b) ?

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ (a.f + b.g)$ au point D(0 ; 3) : quelle conclusion en tirez-vous pour les courbes C(a,b) ?

2 - Tracer sur la figure précédente la courbe C(1,1) : on précisera son centre de symétrie et les points où la normale est colinéaire au vecteur $(-2\vec{i} + 3\vec{j})$

3 - Rechercher les éléments C(a,b) formés de droites.